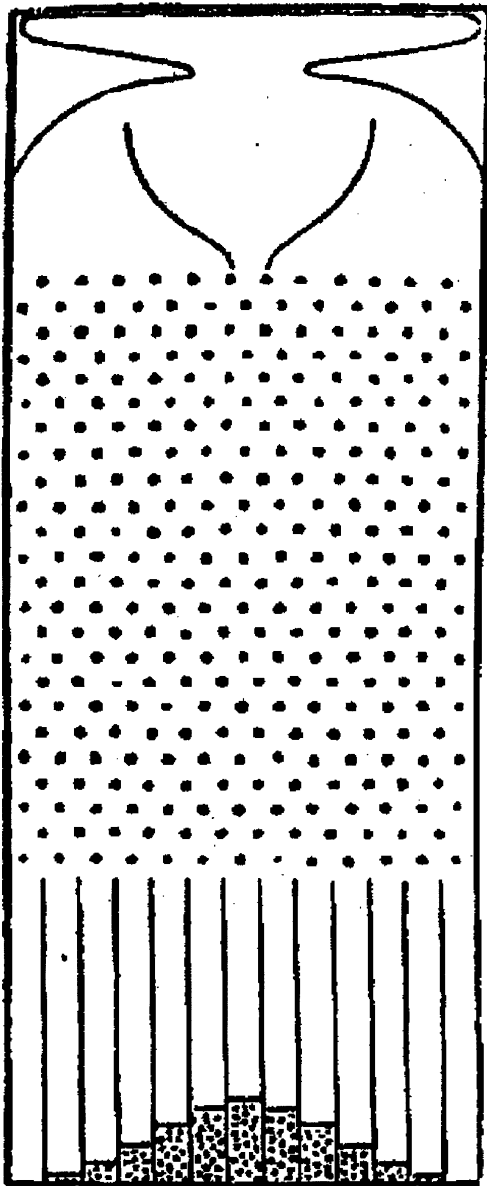

Galtonsches Brett

Versuchsanleitung
Studentenfassung vom 2. Juni 2006

Bernd Pompe
Institut für Physik der Universität Greifswald



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Versuchsapparatur	4
3	Ursache der Zufälligkeit	5
3.1	Elementarprozess	5
3.2	Unmöglichkeit der Vorhersage — Transientes Chaos	7
4	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	9
4.1	Verteilung über die Fächer	9
4.2	Verteilung im einzelnen Fach	11
5	Zentraler Grenzwertsatz	13
5.1	Zentraler Grenzwertsatz — Allgemein	13
5.2	Zentraler Grenzwertsatz und Galtonsches Brett	14
5.3	Zentraler Grenzwertsatz und Mittelwertschätzung	14
6	Anmerkungen zur Geschichte der Normalverteilung	17
7	Auswertung der Messwerte	18

1 Einleitung

Der englische Statistiker und Naturwissenschaftler GALTON (sprich: 'gɔ:ltən) stellte im Jahr 1889 ein mechanisches Zufallsexperiment vor (*Natural Inheritance*, London). Dabei handelt es sich um ein Nagelbrett, über das Kugeln im Schwerfeld der Erde rollen. Eine einzelne Kugel wird beim Zusammenprall mit den Nägeln oder auch beim Stoß mit anderen Kugeln in die eine oder andere Richtung abgelenkt, so dass es letztlich zufällig ist, in welchem der Fächer gleicher Breite am unteren Brettrand sie zur Ruhe kommt. In der Regel sammeln sich die meisten Kugeln in den mittleren Fächern, während außen eher weniger Kugeln gezählt werden. Die Verteilung der Kugeln auf die Fächer ähnelt dem Profil eines Glockenquerschnitts, der sogenannten *Glockenkurve*. Sie bildet sich besonders deutlich aus, wenn eine große Anzahl von Kugeln und Nägeln verwendet werden, so dass es zu sehr vielen Zusammenstößen kommt.

Die Bedeutung der Glockenkurve reicht jedoch weit über dieses Zufallsexperiment hinaus. Sie spielt immer dann eine Rolle, wenn viele zufällige Einzelereignisse zusammenkommen, wie es zum Beispiel beim Messen einer physikalischen Größe der Fall ist: Mehrere Messwerte, die unter vermeintlich gleichen Bedingungen erhalten wurden, sind im Allgemeinen nicht alle gleich, weil sich viele zufällige Störungen einer einzelnen Messung überlagern und somit eine zufällige Abweichung des Messwertes vom unbekanntem „wahren“ Wert verursachen. Man kann nun den gesuchten wahren Wert durch den Mittelwert über mehrere Messungen annähern und mit Hilfe der Glockenkurve Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Abweichungen des Mittelwertes vom wahren Wert machen. Dieses Vorgehen wird durch den zentralen Grenzwertsatz präzisiert.

In der statistischen Physik kann häufig von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung entsprechend der Glockenkurve ausgegangen werden, etwa bei der Modellierung der Brownschen Bewegung: Die unter dem Mikroskop beobachtbare Zitterbewegung von leichten Teilchen wie Pollen in der Flüssigkeit ist das Resultat vieler sich zufällig überlagernder Zusammenstöße mit den Flüssigkeitsmolekülen der Umgebung. Der zufällige Versatz der Pollen von einem Zeitpunkt zum nächsten ist in sehr guter Näherung wie die Glockenkurve verteilt.

Wegen ihrer universellen Bedeutung spricht man bei der Glockenkurve auch von der *Normalverteilung*.

Mit diesem Versuch werden zum einen die Glockenkurve unmittelbar anschaulich gemacht sowie Grundlagen statistischen Schließens entwickelt. Zum anderen wird die physikalische Ursache für die Unmöglichkeit der Vorhersage der Bewegung einer Kugel deutlich, indem sie als eine *transient chaotische* Bewegung identifiziert wird. Chaotische Dynamik ist neben den Gesetzen der Quantenmechanik eines der Grundprinzipien, auf welche die moderne Physik die allseits zu beobachtenden Zufallsphänomene zurückführt.

2 Versuchsaapparatur

Im Experiment verwenden wir das in Abb. 1 dargestellte Brett. Anstelle der Nägel auf Galtons Originalbrett treten hier gleichmäßige Sechsecke, die in ein Brett aus Plexiglas (Polyacryl) gefräst sind. Damit eine Kugel in das äußere linke Fach F_0 gelangt, muss sie nach einem jeden Stoß mit einer Kante nach links abgelenkt werden. Wird sie nur einmal nach rechts geleitet, kann sie nicht mehr nach F_0 gelangen. Wird sie auf ihrem gesamten Weg beispielsweise genau einmal nach rechts abgelenkt, so endet sie im Fach F_1 . Diese Ablenkung nach rechts kann gleich in der ersten oder einer der nächsten weiter unten gelegenen Sechseck-Zeilen des Labyrinths erfolgen. Es gibt also nicht nur eine, sondern gleich mehrere (10) mögliche Wege nach F_1 , wohingegen nach F_0 nur genau ein Weg führt. Folglich werden sich in F_1 mit hoher Wahrscheinlichkeit mehr Kugeln sammeln als in F_0 , sofern die Wahrscheinlichkeiten nach links und rechts abgelenkt zu werden annähernd ausgeglichen sind. Die größte Kugelanzahl ist dann im mittleren Fach F_5 zu erwarten, in das die meisten (252) der insgesamt 1024 möglichen Wege führen.

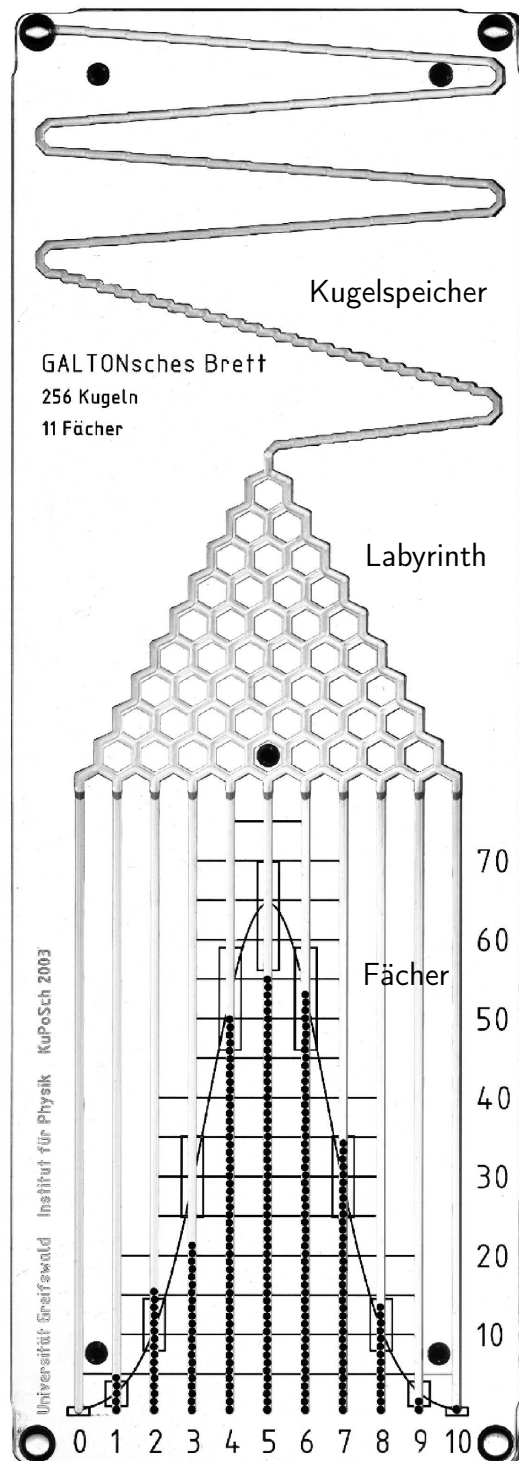


Abb. 1: Galtonsches Brett ($13 \times 37\text{cm}^2$) mit $M = 256$ Kugeln ($\emptyset 2\text{mm}$, NIRO), Kanalbreite $2,6\text{mm}$, $N = 10$ Stoßkantenzeilen im Labyrinth und $N + 1 = 11$ Fächer $F_0 \dots F_N$

3 Ursache der Zufälligkeit

3.1 Elementarprozess

Die Zufälligkeit der Bewegung entsteht beim Galtonschen Brett durch einen Elementarprozess, der in Abb. 2 veranschaulicht ist. Eine einzelne Kugel prellt zwischen den drei Kanten benachbarter Sechsecke solange hin und her, bis sie in einen der beiden Kanalabschnitte, die nach links und rechts unten führen, weitergeleitet wird. Diese Region des Galtonschen Brettes nennen wir *Prellstreuer*. Nach oben kann die Kugel nicht entweichen, weil sie infolge der unelastischen Stöße mit der Wand mechanische Energie verliert. Die Verluste durch Luftreibung sind dagegen gering.

Nach der Passage eines Streuers prellt die Kugel wiederum zwischen drei Kanten benachbarter Sechsecke, allerdings kann sie nun nur in eine Richtung entweichen: nach unten. Diese Region nennen wir *Prelltrichter*.

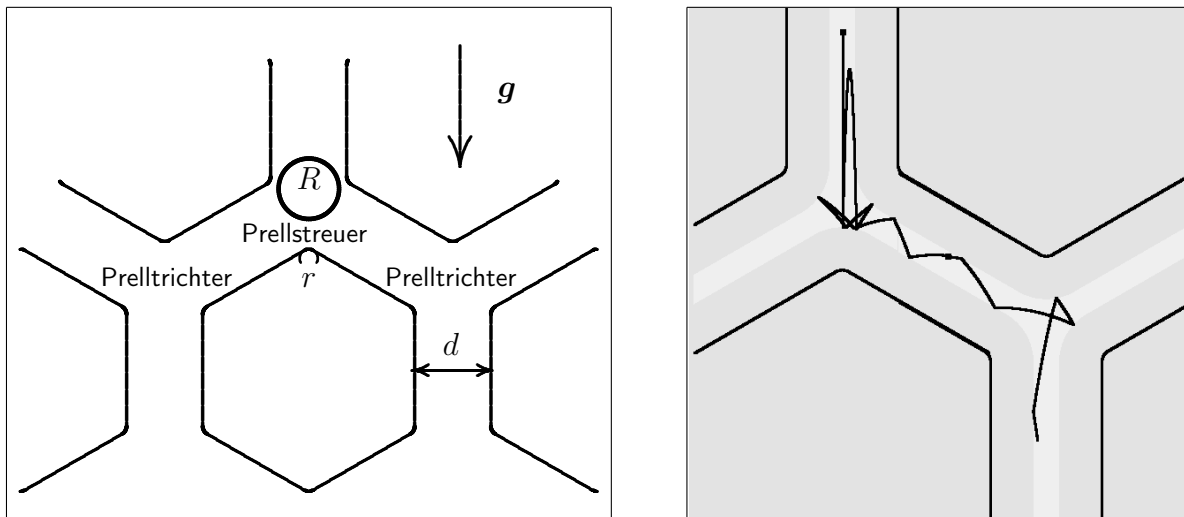


Abb. 2: Elementarprozess beim Galtonschen Brett im Schwerfeld g (numerische Simulation; Maße und Parameter, einschließlich Luft- und Stoßdämpfung, wie beim Experimentierbrett, Abb. 1):

Eine Kugel prellt zwischen 3 benachbarten Sechseck-Kanten mit dem Krümmungs-Radius $r \ll R$, zunächst in einem Prellstreuer, mit einem Einlauf- und zwei Auslaufkanälen, und dann in einem Prelltrichter, mit zwei Einlauf- und einem Auslaufkanal. Rechts ist ein Beispiel gezeigt für den Weg, welchen der Mittelpunkt der Kugel entlangläuft, wenn die Kugel aus der Ruhelage startet

Abbildung 3 a,b) zeigt zwei mögliche Wege (Orbits), entlang derer der Schwerpunkt (Mittelpunkt) einer einzelnen Kugel im Prellstreuer sich bewegen kann. Je nachdem, wo die Kugel startet, wird sie letztlich nach links oder rechts abgelenkt (Abb. 3 c). Welchen der beiden möglichen Kanäle die Kugel einschlägt, hängt in einigen Gebieten empfindlich von kleinsten Änderungen des Ortes und der Geschwindigkeit vor dem Eintritt in diesen *Prellstreuer* ab. Die Empfindlichkeit ist umso stärker ausgeprägt, je kleiner der Krümmungsradius r der Kanten und je enger der Kanal sind, wobei $d \gtrsim 2R$. Ist die Kanalbreite

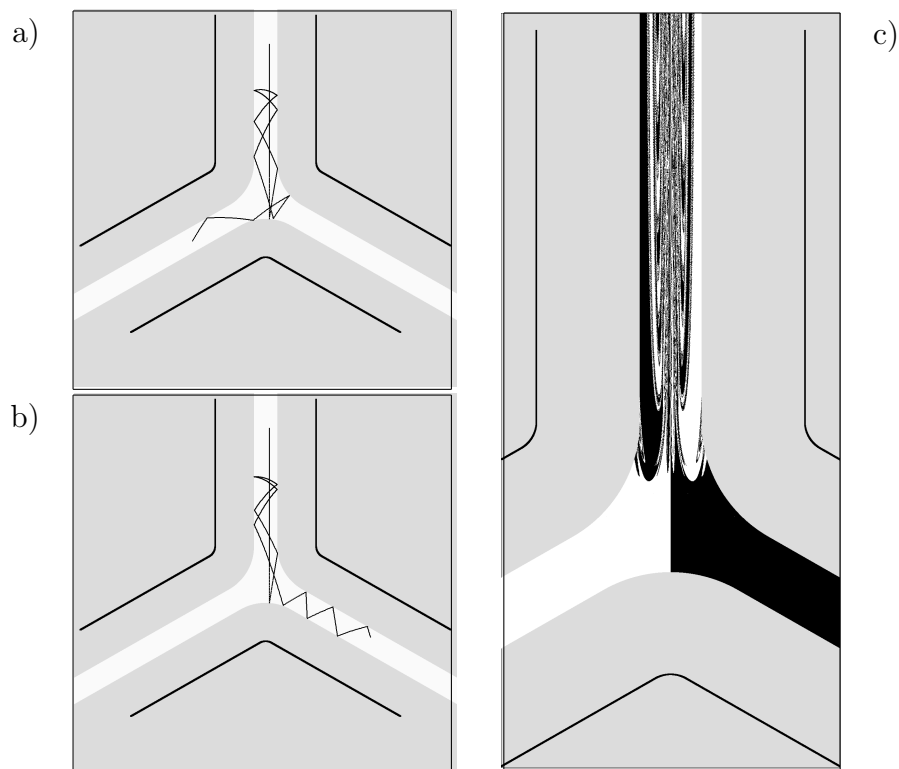


Abb. 3: a, b) Bahnen der Kugel im Prellstreuer des Galtonschen Brettes (numerische Simulationen; Maße und Parameter, einschließlich Luft- und Stoßdämpfung, wie beim Experimentierbrett, Abb. 1). Gezeigt ist die Bahn des Kugelmittelpunktes über eine Dauer vom 100ms, beim Start aus der Ruhelage. Die Bahnen sind in ihrer Anfangslage um $1\mu\text{m}$ gegeneinander versetzt, was mit bloßem Auge nicht erkennbar ist. Ort und Geschwindigkeit zu Beginn der Bewegung bestimmen vollkommen, wohin die Kugel schließlich abgelenkt wird. Um dies jedoch praktisch vorherzusagen, müssten sie sehr genau gemessen werden, was recht aufwändig wäre. Nach 100ms ist die Links-Rechts-Entscheidung allerdings bei beiden Orbits klar erkennbar.

c) Anfangslagen für eine Ablenkung nach links (weiß) bzw. rechts (schwarz), bei Start jeweils aus der Ruhelage. Beobachtet man eine einzelne Kugel und stellt fest, dass sie nach links oder rechts abgelenkt wird, so erhält man letztlich die Information, dass die Kugel im weißen bzw. schwarzen Bereich gestartet sein muss. Die weiße Fläche ist genau so groß wie die schwarze, deshalb sind die Wahrscheinlichkeiten nach links bzw. rechts abgelenkt zu werden, gleich groß, $(1 - p) = p = 0,5$

klein gewählt, fällt die Kugel nahezu senkrecht auf die untere Kante und prellt häufig zwischen den Kanten, was die Zufälligkeit erhöht. Andererseits darf der Kanal aber nicht zu eng sein, damit sich die Kugel noch frei genug bewegen kann, um nicht durch Reibung an den (rauh) Wänden allzu viel Energie zu verlieren. Dann prellt die Kugel in der Regel noch viele Male zwischen den Kanten, was die Bewegung umso schlechter vorhersagbar macht. Der Kanal muss auch deshalb breit genug sein, damit die Kugel nicht allzu lange im Prellstreuer verweilt und somit den nachfolgenden Kugeln rasch genug Platz macht, so dass es mit hoher Wahrscheinlichkeit zu keiner Verstopfung kommt.

Nach der Passage eines Prellstreuers mit zwei möglichen Ausgängen wird die Ku-

gel jedoch immer wieder in einen *Prelltrichter* geführt. Dieser wird ebenfalls durch drei benachbarte Sechsecke derselben Zeilen gebildet und von drei Stoßkanten begrenzt. Allerdings führt hier nur ein Kanal heraus, den die Kugel infolge der Energieverluste durch Stöße und Reibung nun notwendig entlangläuft. Der Bewegung wird dadurch ein Teil ihres zufälligen Charakters genommen.

3.2 Unmöglichkeit der Vorhersage — Transientes Chaos

Nach der Passage eines Prellstreuers und –trichters bleibt vom Zufall genau die Informationsmenge 1 bit übrig, welche darüber Auskunft gibt, ob die Kugel nach rechts oder links abgelenkt wurde. „Zufall und Ordnung“ im Prellstreuer und –trichter wechseln auf diese Weise genau ($N = 10$)-mal ab, bis die Kugel schließlich in einem der Fächer zur Ruhe kommt (Abb. 4, links). Der gesamte Weg der Kugel liefert damit die Informationsmenge 10 bit. Fände die Bewegung auf einem ideal geformten erschütterungsfreien Brett statt, ohne Zusammenstöße mit anderen Kugeln, so wäre dies allein Information über die Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit) der Kugel beim Eintritt in das Labyrinth (Abb. 4, rechts).

Umgekehrt bestimmen die Anfangsbedingungen den Weg der Kugel, allerdings auf sehr empfindliche Weise, so dass eine kleinste Ursache am Anfang eine große Wirkung zum Ende zeigen kann. Sind die Anfangsbedingungen nicht exakt bekannt, was in der Praxis immer der Fall ist, so ist das Resultat auch unter sonst idealen Bedingungen nicht vorhersagbar.

Die Bewegung einer Kugel kann berechnet werden, indem die Bewegungsgleichungen (das ist eine Differentialgleichung) aufgestellt wird, deren Lösung in den Zeitabschnitten zwischen zwei Wandstößen eine ballistische Kurve ist, im Falle vernachlässigter Luftreibung eine Wurfparabel. Diese Bahn (Orbit) ist dann eindeutig bestimmt durch Ort und Geschwindigkeit zum Anfangszeitpunkt.

Die Änderung der Flugbahn bei Zusammenstoß mit der Wand kann berechnet werden, indem zunächst das Reflektionsgesetz angewendet wird, also (i) Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel und (ii) die Geschwindigkeitsvektoren vor und nach dem Stoß sind vom Betrag konstant und liegen mit dem Einfallslot in einer Ebene. Energieverluste werden nun modelliert, indem die zum Lot parallele Geschwindigkeitskomponente nach dem Stoß verringert wird. Die dazu senkrechte (tangente) Komponente bleibt jedoch erhalten. Infolge dieser Energieverluste ist also bei schrägem Einfall der Einfallswinkel kleiner als der Ausfallswinkel (jeweils zum Einfallslot gemessen). Kennt man diese Energieverluste, so kann auch die Bahn der Kugel nach dem Stoß berechnet werden.

Somit könnte die Bewegung einer Kugel durch das gesamte Labyrinth des Galtonschen Brettes aus der Kenntnis der Bewegungsgleichung und den Anfangsbedingungen berechnet werden. Dieser berechnete Orbit stellt dann unsere Vorhersage für die tatsächliche Bewegung dar (Abb. 4, links). Infolge der Stöße mit konvexen Oberflächen (Sechseck-

kanten) im Prellstreuer bzw. -trichter sind diese Orbits jedoch instabil, so dass noch so geringe Messfehler in den Anfangsbedingungen bewirken, dass die Vorhersage mit voranschreitender Zeit immer unsicherer wird.

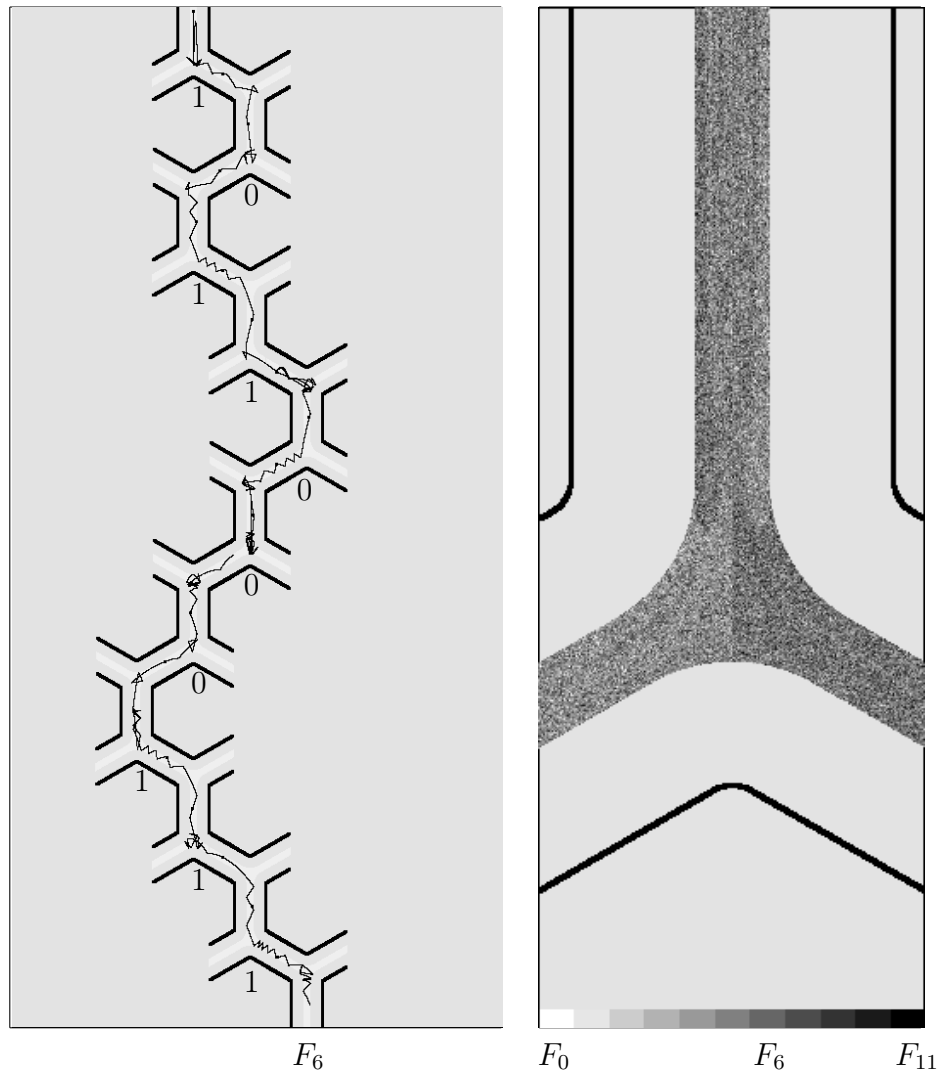


Abb. 4: Links: Weg der Kugel bei Start aus der Ruhelage (Bahn des Kugelmittelpunktes). Die Kugel endet schließlich in Fach F_6 . Codiert man eine Ablenkung nach links und rechts mit 0 bzw. 1, dann ist der Weg durch die Binärfolge 1011000111 beschrieben. Rechts: Grauwertcodierte Anfangslagen des Kugelmittelpunktes (Start aus Ruhelage), bei welchen die Kugel in einem der 11 Fächer endet. Je dunkler der Startwerte markiert sind, desto weiter nach rechts gelangt die Kugel. Startwerte aller Schattierungen liegen eng beieinander, was zum Ausdruck bringt, dass kleinste Änderungen der Anfangslage bewirken können, dass die Kugel schließlich in anderes Fach gelangt, möglicherweise statt nach rechts außen (Fach F_{11} , Startposition schwarz), ganz nach links (Fach F_0 , Startposition weiß)

Aber auch kleinste Störungen durch zufällige Erschütterungen (Wackeln) des Brettes während der Passage, die dem Auge des Betrachters entgehen, können den weiteren Weg der Kugel so stark beeinflussen, dass sie sich schließlich in einem anderen Fach einfindet, als die vorherige Kugel, welche scheinbar gleiche Bedingungen hatte. Hinzu kommen auch

Unebenheiten (Rauhigkeit) der Rollbahn einer Kugel und der Kugel selbst, welche die Bewegung der Kugel auf mikroskopischer Skala „holprig“ erscheinen lassen.

Schließlich können Kugeln auch zufällig zusammenstoßen, etwa dann, wenn eine Kugel nahezu senkrecht auf eine Kante stößt, dabei „Zeit verliert“ und von einer unmittelbar nachfolgenden Kugel eingeholt wird. Auch dies lässt die Bewegung der Kugeln letztlich als zufällig erscheinen.

Man nennt Bewegungsabläufe *chaotisch* (erratisch, verirrt, verstreut, irregulär), wenn kleinste Störungen oder Unregelmäßigkeiten zum Anfang oder auch während der Bewegung *im Mittel exponentiell schnell anwachsen* und somit nach einer gewissen Zeit große Wirkungen zeigen, so dass eine Vorhersage unmöglich oder stark eingeschränkt ist.

Transient chaotisch heißen Bewegungen, die zunächst chaotisch erscheinen, nach einer gewissen Zeit aber doch in einen geordneten (regulären) Zustand übergehen. In diesem Sinn ist die Bewegung einer Kugel auf dem Galtonschen Brett transient chaotisch zu nennen, der geordnete Endzustand ist hier die Ruhelage in einem der Fächer.

Die Bewegung einer einzelnen Kugel auf dem Galtonschen Brett ist mit jener beim Roulette vergleichbar, nur dass dort die Treffer-Wahrscheinlichkeiten der Fächer alle gleich groß sind. Auch das Würfeln ist eine transient chaotische Bewegung, die in genau einem von sechs regulären Zuständen endet. Lostrommeln, die beim spektakulären Ziehen von Lottozahlen eingesetzt werden, zeigen ebenso eine transient chaotische Dynamik. Die Endzustände beim fairen Würfel und der Lostrommel sind wie beim Roulette gleichwahrscheinlich, was allerdings praktisch immer nur näherungsweise gilt.

4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

4.1 Verteilung über die Fächer

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass eine Kugel in ein bestimmtes Fach gelangt. Dazu überlegen wir uns zunächst, auf welchen Wegen eine Kugel in ein Fach gelangen kann und berechnen deren Wahrscheinlichkeiten. Die Summe über die Wahrscheinlichkeiten aller Wege, die in das bestimmte Fach führen, liefert schließlich die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

- Schritt** Auf ihrem Weg in eines der $N + 1$ Fächer F_0, F_1, \dots, F_{10} wird eine jede Kugel genau N -mal zufällig nach links oder rechts abgelenkt. Wir können den Weg der Kugel durch eine N -stellige Folge von Nullen und Einsen beschreiben, die für eine Ablenkung nach links bzw. rechts stehen. Dann codiert beispielsweise das Binärwort $\mathbf{w} = 1011000111$ den Weg der Kugel in der Abbildung 4, links. Dieser Weg endet also im Fach F_6 . Die Fachnummer n ist gleich der Anzahl der Einsen im Binärwort. Offenbar gibt es genau $2^N = 2^{10} = 1024$ verschiedene Wege, das ist gleich der Anzahl

aller möglichen zehn-stelligen Binärworte

$$00000\ 00000\ ,\ 00000\ 00001\ ,\ \dots\ ,\ 11111\ 11111\ .$$

Um nach F_n zu gelangen, muss die Kugel genau n -mal nach rechts und $(N - n)$ -mal nach links abgelenkt werden. Das Codewort eines entsprechenden Weges muss also genau n Einsen enthalten, wofür es $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ Möglichkeiten gibt.¹⁾

2. Schritt Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel an einer Kante nach rechts abgelenkt wird, bezeichnen wir mit p . Die Ablenkungswahrscheinlichkeit nach links ist demzufolge $1 - p$, denn die Summe beider muss eins ergeben. Steht das Brett senkrecht, können wir in guter Näherung $p = 1/2$ setzen. Würde das Brett jedoch etwas nach rechts geneigt, so würde p mit dem Neigungswinkel zunehmen.

Es ist im Allgemeinen kompliziert, die Wahrscheinlichkeiten $s_{\mathbf{w}}$ für die $2^N = 1024$ Wege \mathbf{w} zu bestimmen. Wir können dies jedoch vereinfachen, wenn wir annehmen, dass das zufällige Ereignis der Ablenkung der Kugel nach links oder rechts unabhängig davon ist, in welche Richtungen die Kugel an den vorherigen Kanten abgelenkt wurde. Man spricht hier von der *statistischen Unabhängigkeit* der zufälligen Ereignisse. Dann können wir beispielsweise $s_{1011000111} = (1 - p)^4 \cdot p^6$ setzen. Dahinter steckt die allgemeine Regel, dass *die Wahrscheinlichkeit einer Folge unabhängiger zufälliger Ereignisse gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse ist*. Der Weg 11111 10000 hat dann die gleiche Wahrscheinlichkeit wie der Weg 10110 00111, $s_{11111\ 10000} = s_{10110\ 00111}$. Allgemein sind die Wahrscheinlichkeiten der Wege, die in ein bestimmtes Fach F_n führen, alle gleich,

$$s_{\mathbf{w}} = (1 - p)^{N-n} \cdot p^n\ ,\ \text{mit}\ n = \text{Anzahl der Einsen in } \mathbf{w}\ .$$

3. Schritt Addieren wir nun alle Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Wege nach F_n , so erhalten wir die gesuchte

Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in das Fach F_n gelangt:

$$p_N(n) = \binom{N}{n} \cdot (1 - p)^{N-n} \cdot p^n\ ,\ \text{mit}\ n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

Das ist die sogenannte *Binomialverteilung* über den Fächern F_n . Dieser Name leitet sich daraus ab, dass wir die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten als Binomialentwicklung von $[p + (1 - p)]^N = 1^N = 1$ auffassen können,

$$\sum_{n=0}^N p_N(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \cdot (1 - p)^{N-n} \cdot p^n = [p + (1 - p)]^N\ .$$

¹⁾In der Kombinatorik spricht man von der Anzahl von Kombinationen ohne Wiederholung bei der Wahl von n aus N Elementen. Das ist im Sinne des Lottospiels die Anzahl der Tipp-Möglichkeiten beim Lotto „ n aus N “.

Der Erwartungswert (Mittelwert) μ und die Streuung (Varianz, Dispersion) σ^2 der Binomialverteilung sind

$$\mu \equiv \sum_{n=0}^N p_N(n) \cdot n = Np \quad , \quad \text{bzw.} \quad \sigma^2 \equiv \sum_{n=0}^N p_N(n) \cdot (n - \mu)^2 = Np(1 - p) \quad . \quad (2)$$

Die Wurzel der Varianz heißt *Standardabweichung* der Verteilung, σ .

Die Binomialverteilung für $p = 1/2$ (senkrechttes Brett) ist in der Tabelle 1 angegeben. In diesem Sonderfall ist die Verteilung symmetrisch, $p_N(n) = p_N(N - n) = \binom{N}{n} \cdot 2^{-N}$, und man erhält $\mu = N/2$ und $\sigma = \sqrt{N}/2$.

Tab. 1: Wahrscheinlichkeiten (1) und zugehörige erwartete Kugelzahl $M \cdot p_N(n)$ für das Galtonsche Brett in Abb. 1 ($M = 256$ Kugeln, $N + 1 = 11$ Fächer)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_N(n)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
$M \cdot p_N(n)$	$1/4$	$2 \ 2/4$	$11 \ 1/4$	30	$52 \ 2/4$	63	$52 \ 2/4$	30	$11 \ 1/4$	$2 \ 2/4$	$1/4$

4.2 Verteilung im einzelnen Fach

Wiederholen wir einen Versuch, bei dem wir jeweils 256 Kugeln fallen lassen, viele Male, so werden wir im zentralen Fach F_5 gerade $M \cdot p_N(n) = 63$ Kugeln erwarten. Allerdings wird diese Kugelzahl nicht in einem jeden Versuch gezählt werden. Es stellt sich somit die Frage, wie stark die Kugelzahl m im Fach F_n von Versuch zu Versuch schwankt. Zur Beantwortung rechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit $q_{N,n,M}(m)$ dafür aus, dass von den insgesamt M Kugeln sich genau m Kugeln, $0 \leq m \leq M$, im Fach F_n einfinden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine einzelne Kugel nach F_n gelangt, haben wir bereits oben mit $p_N(n)$ bestimmt, Gl. (1). Durchlaufen M Kugeln das Galtonbrett, so müssen dazu genau m -mal Kugeln nach F_n gelangen, und folglich $(M - m)$ -mal nicht dorthin. Dafür gibt es $\binom{M}{m}$ viele Möglichkeiten, von der jede die Wahrscheinlichkeit $(1 - p_N(n))^{M-m} \cdot p_N^m(n)$ hat. Hierbei setzen wir voraus, dass sich die Kugeln voneinander statistisch unabhängig in den Fächern einfinden. All diese Wahrscheinlichkeiten aufsummiert, liefert die gesuchte

Wahrscheinlichkeit, dass genau m Kugel ins Fach F_n gelangen:

$$q_{N,n,M}(m) = \binom{M}{m} \cdot (1 - p_N(n))^{M-m} \cdot p_N^m(n) \quad , \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M$$

(3)

Für ein festes Fach F_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$, ist dies wiederum eine Binomialverteilung, und es gilt die Normierung $\sum_{m=0}^M q_{N,n,M}(m) = 1$. Abbildung 5 zeigt den Erwartungswert

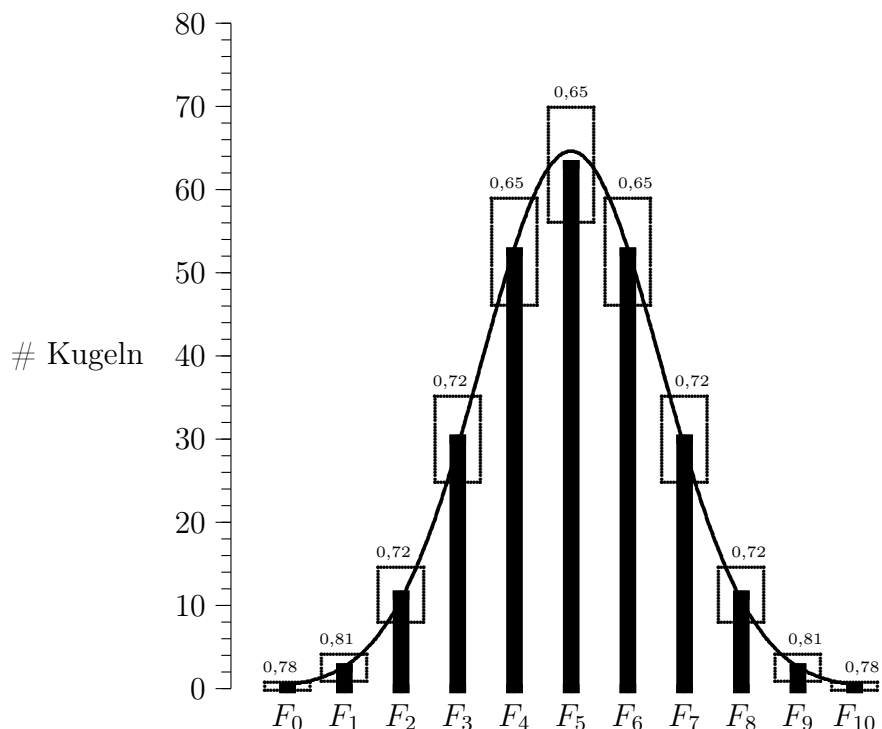


Abb. 5: Verteilung der Kugelanzahl für das Galtonsche Brett mit $N + 1 = 11$ Fächern und $M = 256$ Kugeln, sowie Ablenk-Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$.

Histogramm: Erwartungswert $M \cdot p_N(n)$ der Anzahl von Kugeln in den einzelnen Fächern entsprechend der Binomialverteilung (1);

Rechtecke: Bereiche $M \cdot p_N(n) \pm \sigma_{N,M}(n)$ um den Erwartungswert, Gl. (4), mit angegebener Wahrscheinlichkeit, Gl. (5) mit $a = M \cdot p_N(n) - \sigma_{N,M}(n)$ und $b = M \cdot p_N(n) + \sigma_{N,M}(n)$;

ausgezogene Kurve: Erwartungswerte entsprechend Approximation durch Normalverteilung, Gl. (6)

$M \cdot p_N(n)$ mit dem zugehörigen Bereich

$$M \cdot p_N(n) \pm \sigma_{N,M}(n) \quad , \quad \text{mit} \quad \sigma_{N,M}(n) = \sqrt{M \cdot p_N(n) \cdot (1 - p_N(n))} \quad , \quad (4)$$

in welchem die Kugelanzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $2/3$ anzutreffen ist. Genauere Werte dieser Wahrscheinlichkeiten sind in der Abbildung angegeben. Allgemein lässt sich die Wahrscheinlichkeit W , dass m in einem Intervall $[a, b]$ liegt, wie folgt berechnen,

$$W(a \leq m \leq b) = \sum_{m: a \leq m \leq b} q_{N,n,M}(m) \quad . \quad (5)$$

Es sei angemerkt, dass die Anzahl von Kugeln m_n , die sich in den einzelnen Fächern F_n bei einem Versuch einstellt, nicht voneinander unabhängig sind, $n = 0, 1, \dots, N$. Würde beispielsweise der recht unwahrscheinliche Fall eintreten, dass alle Kugeln im Fach F_5 sind, so müssen die anderen Fächer offenbar leer bleiben, denn die Summe der Anzahl aller Kugeln ist konstant, $M = m_0 + m_1 + \dots + m_N$. Dies soll hier jedoch nicht vertieft werden, denn an unserer bisherigen Betrachtung ändert sich dadurch nichts.

5 Zentraler Grenzwertsatz

5.1 Zentraler Grenzwertsatz — Allgemein

Die ausgezogene Kurve in Abbildung 5 stellt eine Näherung der Binomial- durch die sogenannte *Normal-Verteilung* dar: Bei gegebenen Werten für p und n gilt für große Werte von N ,

$$p_N(n) \rightarrow f(n) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{für } N \rightarrow +\infty \quad (6)$$

$$\mu = Np, \quad \sigma^2 = Np(1-p)$$

Die Funktion $f(n)$ ist die Dichte der sogenannten *Normalverteilung* zum Mittelwert μ und zur Standardabweichung σ . Wegen ihrer markanten Form wird sie auch *Glockenkurve* genannt.

Wie gut die Näherung von $p_N(n)$ durch die Glockenkurve ist, hängt auch von der Wahrscheinlichkeit p ab. Für $N > 100$ und $-3\sigma \leq n - \mu \leq 3\sigma$ ist der relative Fehler $p_N(n)/f(n)$ kleiner 0,03 bei $p = 1/2$, aber nur kleiner 0,04 bei $p = 1/5$. Für $p < 0,01$ bzw. $p > 0,99$ ist die Näherung praktisch unbrauchbar, sofern nicht N unrealistisch groß ist.

Bei festgehaltener Fachnummer n strebt die Wahrscheinlichkeit $p_N(n)$ für $N \rightarrow +\infty$ gegen null. Addiert man jedoch alle Wahrscheinlichkeiten in der Nähe des Mittelwertes, so erhält man

$$\sum_{n: a \leq \frac{n-\mu}{\sigma} \leq b} p_N(n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \text{für } N \rightarrow +\infty$$

$$\mu = Np, \quad \sigma^2 = Np(1-p)$$

Die Normalverteilung spielt für die Fehlerrechnung wie allgemein in der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik eine herausragende Rolle, was durch einen Grenzwertsatz präzisiert wird:

Zentraler Grenzwertsatz:

Eine Messgröße möge aus der additiven Überlagerung von vielen zufälligen Einzelgrößen entstehen, die statistisch unabhängig voneinander sind und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen jeweils eine endliche Varianz haben, aber sonst beliebig und möglicherweise auch verschieden verteilt sind. Dann ist die Messgröße näherungsweise *normalverteilt*. Die Näherung gilt umso besser, je mehr zufällige Einzelgrößen einwirken.

Diese Aussage ist umso bemerkenswerter, als wir hierbei die Verteilung der einzelnen Einflüsse oder gar ihren physikalischen Ursprung nicht zu kennen brauchen. In der Praxis können wir dennoch häufig davon ausgehen, dass die resultierende (uns interessierende) Zufallsgröße (Messgröße) normalverteilt ist.

5.2 Zentraler Grenzwertsatz und Galtonsches Brett

Beim Galtonschen Brett ist die Nummer n , die das Fach indiziert, in der sich eine Kugel einfindet, annähernd normalverteilt. Die im zentralen Grenzwertsatz vorkommenden zufälligen Einzelgrößen, deren Summe die Fachnummer ergibt, sind gerade die N numerischen Werte (Nullen und Einsen) des Binärwortes \mathbf{w} , das den Weg codiert (Abb. 4, links).

Die zufällige Anzahl m der Kugeln in einem Fach F_n entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung (3) ist ebenso annähernd normalverteilt. Das trifft bei der Kugelzahl $M = 256$ und der Ablenkswahrscheinlichkeit $p = 1/2$ vor allem für jene Fächer zu, in welche die Kugeln mit relativ großer Wahrscheinlichkeit $p_N(n)$ eintreffen, also für die mittleren Fächer. Die Kugelzahl m kann man sich hier als additive Überlagerung von M Nullen und Einsen vorstellen, die statistisch unabhängig sind und welche die Wahrscheinlichkeiten $1 - p_N(n)$ bzw. $p_N(n)$ haben. Für $M \rightarrow +\infty$ ist auch hier wieder der zentrale Grenzwertsatz anwendbar.

5.3 Zentraler Grenzwertsatz und Mittelwertschätzung

Vom zentralen Grenzwertsatz machen wir auch bei der Mittelung Gebrauch, wo wir aus einer Messreihe x_1, x_2, \dots, x_T den (empirischen) Mittelwert berechnen,

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \quad (7)$$

Für eine große Anzahl ($T \gtrsim 20$) von Messwerten kann in der Messpraxis häufig davon ausgegangen werden, dass \bar{x} näherungsweise normalverteilt ist, sofern die Messwerte statistisch unabhängig gewonnen wurden. Dies folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz, denn \bar{x} entsteht im Wesentlichen durch die additive Überlagerung der zufälligen Messgrößen x_t . Die Standardabweichung von \bar{x} kann durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2} \quad (8)$$

geschätzt werden.²⁾ Damit können wir wie folgt die Zuverlässigkeit unserer Messung charakterisieren:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte wahre Wert x_w im Intervall

$$[\bar{x} - a \cdot \sigma_x, \quad \bar{x} + b \cdot \sigma_x]$$

liegt, ist näherungsweise durch

$$W(a < x_w < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^b e^{-z^2/2} dz$$

gegeben, für $a, b \geq 0$.

Es gelten $W(-\infty < x_w < +\infty) = 1$ und $W(x_w < \bar{x}) \approx W(x_w > \bar{x}) \approx 1/2$. Das Integral über die Glockenkurve ist jedoch nicht für beliebige Grenzen analytisch lösbar, weshalb die Funktion tabelliert und auf wissenschaftlichen Taschenrechnern implementiert ist, als sogenannte *Fehlerfunktion* (*error function*),

$$\operatorname{erf}(a/\sqrt{2}) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx . \quad (9)$$

Abbildung 9 zeigt den Graph der Fehlerfunktion sowie einige spezielle Werte, die häufig verwendet werden. Es gilt dann

$$W(\bar{x} - a \cdot \sigma_x < x_w < \bar{x} + a \cdot \sigma_x) = \operatorname{erf}(a/\sqrt{2})$$

Man schreibt hierfür auch

$$x = \bar{x} \pm a \cdot \sigma_x \quad \left(\operatorname{erf}(a/\sqrt{2}) \cdot 100\% \right) \quad (10)$$

Für $a = 1$ schreibt man,

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x \quad (68\%) .$$

Nach dem Grenzwertsatz müssen wir für diese Argumentation nicht notwendig voraussetzen, dass die einzelnen Messwerte x_1, x_2, \dots, x_T normalverteilt sind, obgleich auch dies häufig der Fall ist, nämlich dann, wenn die Zufälligkeit einer Einzelmessung ihrerseits als eine additive Überlagerung vieler unabhängiger zufälliger Einflüsse aufgefasst werden kann.

²⁾Die genaue Begründung der Formeln (7) und (8) erfolgt in der statistischen Theorie. Dort wird gezeigt, dass die beiden Schätzer erwartungstreu und effizient sind, d.h., in einem bestimmten Sinne sind es die „besten“ Schätzer der beiden Größen.

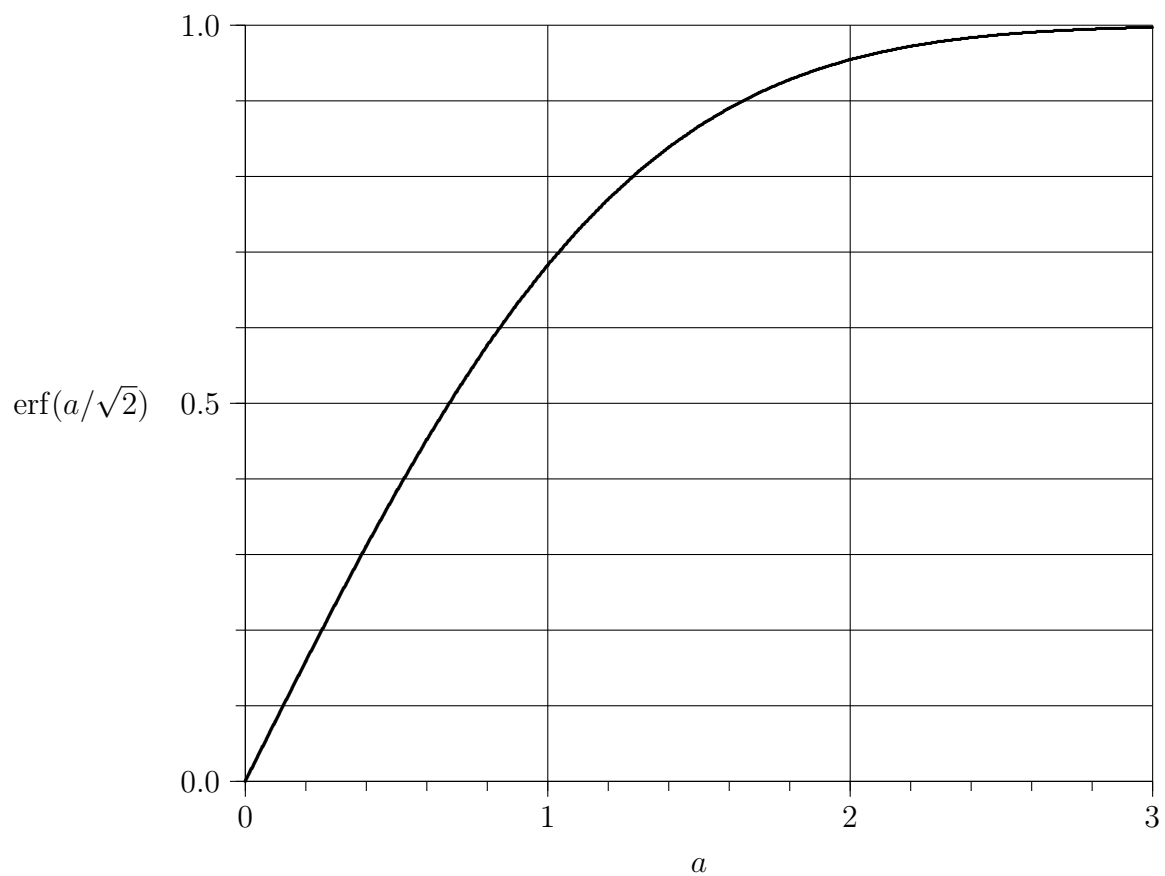


Abb. 6: Fehlerfunktion (9). Es gelten $\text{erf}(1/\sqrt{2}) = 0,6826\dots$, $\text{erf}(2/\sqrt{2}) = 0,9545\dots$ und $\text{erf}(3/\sqrt{2}) = 0,9973\dots$.

6 Anmerkungen zur Geschichte der Normalverteilung

ABRAHAM DE MOIVRE (Franzose, 1667–1754) skizzierte in seiner Schrift *Doctrine of Changes* im Jahre 1733 erstmals den Übergang von der Binomial- zur Normalverteilung. CARL FRIEDRICH GAUSS (Deutscher, 1777–1855, Abb. 7) arbeitete eine Theorie der Beobachtungsfehler aus, die eng verknüpft ist mit der Normalverteilung, der Streuung und der Methode der kleinsten Quadrate. Er publizierte sie erstmals 1809 in seinem zweiten Buch *Theoria motus corporum coelestium* (Bewegungstheorie der Himmelskörper), während der Franzose ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833) zur Methode der kleinsten Quadrate bereits ein Jahr früher veröffentlichte, was einen Urheberstreit zwischen beiden zur Folge hatte. Im Zusammenhang mit der Behandlung von Messfehlern wurde die allgemeine Bedeutung der Normalverteilung auch früh von ROBERT ADRAIN (Irländer/Amerikaner, 1775–1843) erkannt, seine Arbeit aus dem Jahr 1808 blieb jedoch lange Zeit unbeachtet. GALTON äußerte sich zur Normalverteilung wie folgt:

Ich kenne kaum etwas, das unsere Phantasie so mitreißen kann wie die wundervolle Form kosmischer Ordnung, die das *Gesetz der Fehlerhäufigkeit* ausdrückt. Hätten die Griechen es gekannt, sie hätten es personifiziert und als Gottheit angebetet. In der wildesten Konfusion verbreitet es harmonische Ruh; je ärger die Anarchie, um so souveräner ist seine Herrschaft. Hinter dem Schleier des Chaos tritt es als unerhoffte und wunderschöne Form der Regelmäßigkeit hervor.

Der Zentrale Grenzwertsatz geht auf den Franzosen PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) zurück, der schon 1778 erkannte, dass der Mittelwert von vielen Einzelwerten normalverteilt ist, selbst dann, wenn der einzelne Wert nicht normalverteilt ist. In seiner heutigen Form wurde der Satz jedoch durch den Russen ALEXANDER MICHAJLOWITSCH LJAPUNOV (1857–1918) bewiesen.



Abb. 7: GAUSS und die Glockenkurve zierten den letzten 10DM-Geldschein

7 Auswertung der Messwerte

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Mittelwert

$$\bar{m}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K T(k, n)$$

und den Vertrauensbereich

$$\sigma_m(n) = \sqrt{\frac{1}{K(K-1)} \sum_{k=1}^K [T(k, n) - \bar{m}(n)]^2}$$

der Anzahl von Kugeln in den einzelnen Fächern F_n , $n = 1, 2, \dots, 10$, und stellen Sie die Werte in einem Histogramm dar (wie in Abb. 5). Zeichnen Sie auch die entsprechenden Erwartungswerte der Anzahl von Kugeln in den einzelnen Fächern ein, indem Sie zum einen $M \cdot p_N(n)$ entsprechend der Binomialverteilung (1) verwenden, und zum anderen

$$M \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

entsprechend der Approximation durch die Normalverteilung (6). Setzen Sie hierbei jeweils $p = 0,5$ und $N = 10$.

Aufgabe 2:

- (a) Bestimmen Sie aus den Messwerten die Wahrscheinlichkeit p , mit der eine Kugel beim Galtonschen Brett nach rechts abgelenkt wird. Geben Sie den Vertrauensbereich für 68% und 95% Sicherheit an.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $p > \bar{p} + \sigma_p$?

- (b) Wieviele Versuche müssten Sie durchführen, um den Vertrauensbereich bei 95% Sicherheit mit einer Breite von $\bar{p} \pm 0,001$ angeben zu können ?
- (c) Berechnen Sie aus der gemessenen Wahrscheinlichkeit p den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der Binomialverteilung der Kugeln in den Fächern (Gl. (2)), unter Beachtung der Fehlerfortpflanzung.

Hinweise: Die zu schätzende Wahrscheinlichkeit p kann als Mittelwert über eine Serie $\{x_t\}_{t=1}^T$ von T_0 Werten 0 und T_1 Werten 1 aufgefasst werden. Die Werte x_t ergeben sich aus den gezählten Kugeln: wird eine Kugel im Fach F_n registriert, so liefert sie in der Serie genau n Einsen und $N - n$ Nullen. Werden im k -ten Versuch $T(k, n)$ Kugeln im Fach F_n registriert, so erhält man die Gesamtzahl der Nullen und Einsen in der Serie aus

$$T_0 = \sum_{n=0}^N \left[(N - n) \cdot \sum_{k=1}^K T(k, n) \right], \quad \text{bzw.} \quad T_1 = \sum_{n=0}^N \left[n \cdot \sum_{k=1}^K T(k, n) \right].$$

Es gilt dann

$$T \equiv T_1 + T_0 = N \cdot M \cdot K = 10 \cdot 256 \cdot 10 = 2^8 \cdot 10^2 = 25600 .$$

Der Mittelwert der Serie $\{x_t\}_{t=1}^T$ ergibt sich aus

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t = \frac{T_1}{T} .$$

Die Varianz des Mittelwertes kann dann unter Beachtung von $T(T-1) \approx T^2$ wie folgt berechnet werden,

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{p})^2 \approx \frac{T_0(0 - \bar{p})^2 + T_1(1 - \bar{p})^2}{(T_0 + T_1)^2} = \frac{T_0 \cdot T_1}{(T_0 + T_1)^3} .$$

Für $T_0 \approx T_1 \approx T/2$ vereinfacht sich der Ausdruck schließlich zu

$$\sigma_p \approx \frac{1}{2\sqrt{T}}$$

Mit den obigen Zahlenwerten erhalten wir

$$\sigma_p \approx 0,003 .$$

Folglich gilt unter Beachtung von (9) und (10),

$$p = \bar{p} \pm a \cdot 0,003 \quad (\text{erf}(a/\sqrt{2}) \times 100\%) .$$